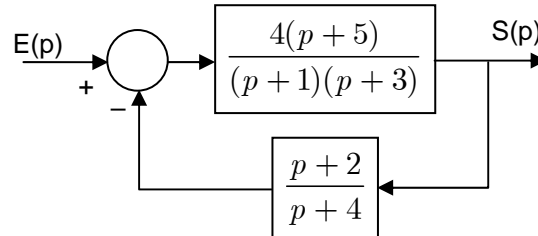
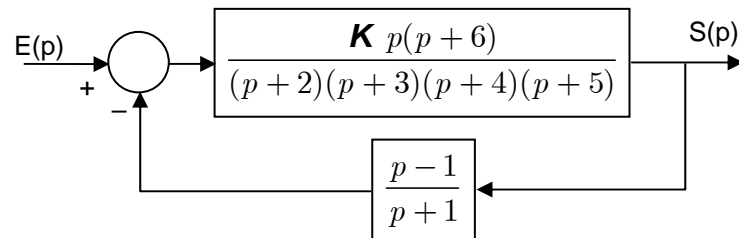
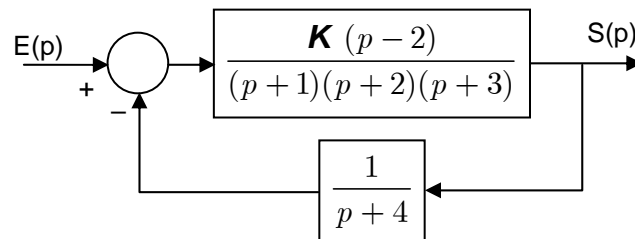
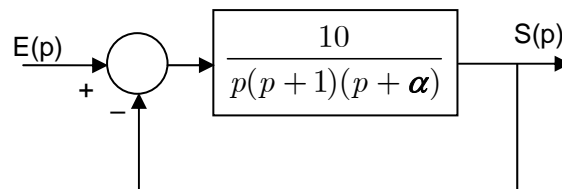


Exercice n°1

En utilisant le critère algébrique de Routh-Hurwitz, déterminez la stabilité en boucle fermée des systèmes asservis suivants :

a)

b, c) : Faire l'étude pour $K=10$ et $K=100$ d) : Faire l'étude en fonction de $K>0$ e) : Faire l'étude en fonction de α 

Exercice n°1

Etude de la stabilité en boucle fermée des systèmes asservis, en utilisant le critère algébrique de Routh-Hurwitz :

1-a) $1+ FTBO(p) = 0 \Rightarrow p^3 + 12p^2 + 47p + 52 = 0$

- Critère d'Hurwitz (condition nécessaire mais pas suffisante) vérifié : Tous les coefficients de l'équation caractéristique sont de même signe et non nuls \Rightarrow tableau de Routh.
- Critère de Routh-Hurwitz (tableau de Routh) : 1^{ère} colonne de même signe \Rightarrow **Système stable**.

$p^3 :$	1	47
$p^2 :$	12	<u>52</u>
$p^1 :$	42.67	
$p^0 :$	<u>52</u>	

1-b) Cas du gain $K=10$

$1+ FTBO(p) = 0 \Rightarrow p^5 + 15p^4 + 95p^3 + 275p^2 + 214p + 120 = 0$

- Critère d'Hurwitz (condition nécessaire mais pas suffisante) vérifié : Tous les coefficients de l'équation caractéristique sont de même signe et non nuls \Rightarrow tableau de Routh.
- Critère de Routh-Hurwitz (tableau de Routh) : 1^{ère} colonne de même signe \Rightarrow **Système stable**.

$p^5 :$	1	95	214
$p^4 :$	15	275	<u>120</u>
$p^3 :$	76.7	206	
$p^2 :$	234.7	<u>120</u>	
$p^1 :$	166.8		
$p^0 :$	<u>120</u>		

1-c) Cas du gain $K=100$

$1+ FTBO(p) = 0 \Rightarrow p^5 + 15p^4 + 185p^3 + 725p^2 - 326p + 120 = 0$

- Critère d'Hurwitz (condition nécessaire mais pas suffisante) non vérifié : Les coefficients de l'équation caractéristique sont de signes différents \Rightarrow **Système instable**.
- Critère de Routh-Hurwitz (tableau de Routh) : permet de déterminer le nombre de pôles instables de la FTBF : 2 changements de signe sur la 1^{ère} colonne, donc **2 pôles instables**.

$p^5 :$	1	185	-326
$p^4 :$	15	725	<u>120</u>
$p^3 :$	136.7	-334	
$p^2 :$	761.7	<u>120</u>	
$p^1 :$	-355.5		
$p^0 :$	<u>120</u>		

Si nous comparons les 2 exercices précédents, ils ne diffèrent que par la valeur du gain K .

- Pour le cas du gain $K=10$, le système est stable.
- Pour le cas du gain $K=100$, le système est instable.

\Rightarrow **L'augmentation du gain a un effet déstabilisant sur le système en boucle fermée.**

$$1-d) \quad 1+FTBO(p) = 0 \Rightarrow p^4 + 10p^3 + 35p^2 + (50 + K)p + (24 - 2K) = 0$$

- Critère d'Hurwitz (condition nécessaire mais pas suffisante) : Tous les coefficients de l'équation caractéristique doivent être de même signe et non nuls.

$$\Rightarrow \begin{cases} (50 + K) > 0 \\ (24 - 2K) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K > -50 \\ K < 12 \end{cases} \Rightarrow 0 < K < 12$$

- Critère de Routh-Hurwitz (tableau de Routh)

p^4 :	1	35	24-2K
p^3 :	10	50+K	
p^2 :	$\frac{300-K}{10}$	24-2K	
p^1 :	$\frac{\left(\frac{300-K}{10}\right)(50+K) - 10(24-2K)}{\left(\frac{300-K}{10}\right)}$		
p^0 :	24-2K		

Pour que le système soit stable, il faudrait que les termes de la 1^{ère} colonne soient de même signe :

$$\Rightarrow \begin{cases} (300 - K) > 0 \\ \frac{\left(\frac{300-K}{10}\right)(50+K) - 10(24-2K)}{\left(\frac{300-K}{10}\right)} > 0 \\ 0 < K < 12 \text{ (condition précédente)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{300-K}{10}\right)(50+K) - 10(24-2K) > 0 \\ 0 < K < 12 \end{cases}$$

Or :

$$\left(\frac{300-K}{10}\right)(50+K) - 10(24-2K) > 0 \Rightarrow K^2 - 450K - 12600 < 0$$

$$2 \text{ racines : } \begin{cases} -26.4 \\ 476.4 \end{cases} \Rightarrow -26.4 < K < 476.4$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} -26.4 < K < 476.4 \\ 0 < K < 12 \end{cases} \Rightarrow 0 < K < 12$$

Le système sera stable à condition que : $0 < K < 12$

$$1-e) \quad 1+FTBO(p) = 0 \Rightarrow p^3 + (1+\alpha)p^2 + \alpha p + 10 = 0$$

- Critère d'Hurwitz (condition nécessaire mais pas suffisante) : Tous les coefficients de l'équation caractéristique doivent être de même signe et non nuls.

$$\Rightarrow \begin{cases} (1+\alpha) > 0 \\ \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > -1 \\ \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha > 0$$

- Critère de Routh-Hurwitz (tableau de Routh)

$p^3 :$	1	α
$p^2 :$	$1+\alpha$	10
$p^1 :$	$\frac{\alpha(1+\alpha)-10}{1+\alpha}$	
$p^0 :$	10	

Pour que le système soit stable, il faudrait que les termes de la 1^{ère} colonne soient de même signe :

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+\alpha > 0 \\ \frac{\alpha(1+\alpha)-10}{1+\alpha} > 0 \\ \alpha > 0 \text{ (condition précédente)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(1+\alpha)-10 > 0 \\ \alpha > 0 \end{cases}$$

Or :

$$\alpha(1+\alpha)-10 > 0 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha - 10 > 0 \Rightarrow \alpha < -3.7 \quad \text{ou} \quad \alpha > 2.7$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \alpha < -3.7 \quad \text{ou} \quad \alpha > 2.7 \\ \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha > 2.7$$

Le système sera stable à condition que : $\alpha > 2.7$

Cela veut dire que pour que le système soit stable, il faudrait, non seulement, que le pôle $p = -\alpha$ de la FTBO se trouve dans le demi plan gauche du plan complexe, mais qu'il ait, également, une valeur inférieure à -2.7 .